DOWNLOAD

Matthias Römer · Karl Charon

Mathe-Lernumgebungen: Vedisch rechnen

Mathematik erleben in Lernumgebungen – Algorithmen, Grundrechenarten

Downloadauszug aus dem Originaltitel:

AOL verlag

Vorwort

Wie lernen wir Mathematik?

Vor kurzem war die Tochter von Freunden bei uns zu Besuch. Sie wollte ein wenig Mathematik üben. Am nächsten Mittwoch, so erzählte sie, schriebe sie eine Klassenarbeit zur Prozent- und Zinsrechnung und da wolle sie noch ein paar Aufgaben rechnen und eine kompetente Person an der Seite haben, damit man ihr sagen könne, ob sie die Aufgaben richtig oder falsch mache. Eigentlich braucht sie niemanden, der sich an ihre Seite setzt, denn ihre Noten in Mathematik sind hervorragend, sie hat alle Formeln im Kopf und kann sie auch umstellen, sodass sie jeweils ausrechnen kann, was in der Aufgabe gesucht wurde. Die Aufgaben im verwendeten Buch waren so gemacht, dass man immer anhand der Satzstellungen erkennen konnte, was gesucht und was gegeben ist. „‚Vorher' heißt Grundwert, oder?", fragte sie dazwischen einmal.

Irgendwann im Verlaufe dieses Sonntagmorgens kam ich auf die haarsträubende Idee, zu fragen, was eigentlich Zinsen sind, immerhin betrieb sie ja nach eigenen Angaben „Zinsrechnung" und insoweit war die Frage gar nicht so abwegig. Sie hatte keinen blassen Schimmer. Sie fragte mich sogar: „Muss ich das denn wissen, um es ausrechnen zu können?" Nein, das musste sie natürlich nicht und da ich kein Mathe-Missionar sein will, beerdigte ich das Thema einstweilen. Dann ließ es mich aber doch nicht los und ich griff zu einem alten Mathematikbuch aus der Hauptschule, in dem es auch ein Kapitel zur Zinsrechnung gab. Ich nannte ihr zwei Aufgaben daraus und bat sie, diese auszurechnen. Auch dieser Versuch war zum Scheitern verurteilt. „Das ist ja ganz anders formuliert als in unserem Buch. Da weiß ich gar nicht, was was ist", entgegnete sie mir. Ich legte diesen Versuch nun endgültig zu den Akten und beschränkte mich darauf, mich neben sie zu setzen und alle fünf Minuten „Richtig!" zu sagen.

Diese Episode macht ein grundsätzliches Dilemma des Mathematikunterrichts deutlich, das in der Fachdidaktik schon sehr lange diskutiert wird, an den Schulen aber leider bisher nicht immer wahrgenommen wird: Mathematik wird gemacht, aber oft nicht verstanden. Wer aber nicht versteht, was er tut, der kann nicht wirklich nachhaltig Mathematik lernen und – das ist der Kern der Mathematik – vielfältig in Situationen anwenden. Wenn Texte immer so gestrickt sind, dass eine Decodierung alleine aufgrund ihrer Syntax und nicht der Semantik erfolgen muss, dann bilden sie alles ab, aber keine authentischen und lebendigen Situationen, in denen Mathematik benötigt wird. Wenn das Üben sich auf das Anwenden bestimmter Formeln beschränkt, anstatt übend zum Verstehen zu gelangen, dann ist es kein sinnvolles Üben, weil jeder immer auf der Stufe stehenbleibt, die er schon zuvor inne hatte, sein Wissen also nicht gestört wird, sodass er es schafft auf eine andere Wissensstufe zu gelangen.[1] Dieser Idee tragen z. B. Konzepte wie das *Produktive Üben*[2] Rechnung, die nicht auf einer Stufe verbleiben, sondern immer wieder den Blick in die nächste Stufe sowohl der mathematischen als auch der allgemeinen Kompetenzen wagen.

Gute Aufgaben müssen dem Lernbedürfnis des verstehenden Mathematiklernens Rechnung tragen. Verschiedene Bedingungen sind an gute Aufgaben zu stellen, damit sie wirkliches Lernen ermöglichen. Sie müssen dazu anregen, Mathematik zu entdecken und zu erleben. Sie müssen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Blick haben und sie sollten in ihrer Art authentisch sein, d. h. nichts anderes vorgeben, als sie zu leisten in der Lage sind. Sie müssen vor allem dazu einladen, Mathematik zu betreiben, ohne nur belehrend zu wirken, so wie eine Einladung immer auch einen Zugang ermöglicht. Neben diesen Bedingungen erscheint es sinnvoll, Aufgaben in übergeordnete Kontexte – gleich ob mathematischer Art oder aus der Umwelt ergründet – einzubetten. Diese Einbettung in Kontexte und somit auch in konkrete Situationen ermöglicht den Schülern, Mathematik im Zusammenhang zu erkennen, vernetzend zu betreiben und situiert als sinnvolle Tätigkeit zu erfahren. Das ist eine Grundvoraussetzung des Lernens im konstruktivistischen Kontext.

Mathematiklernen funktioniert dann, wenn man an fundamentalen „roten" Linien der Mathematik entlang arbeitet und immer wieder kumulativ neue Kenntnisse erwirbt, die mit altem, bereits erworbenen Wissen kompatibel sind, quasi mit diesem verknüpft werden können. Mathematik wird nicht in einzelnen Kapiteln gelernt, bei denen man scheinbar so tut, als hätten sie nichts miteinander zu tun, sondern in vernetzten Welten, in denen die Mathematik als Möglichkeit zum Lösen von Problemen wahrgenommen wird. Also muss Mathematik nicht abbilddidaktisch erworben werden als ein Spiegelbild der universitären Mathematik sondern in einem Erlebnis eingebettet sein, ebenso wie eine Sprache am besten gelernt wird, wenn man sie spricht, hört, schreibt und liest.

[1] Das Erlangen neuer Wissensstufen durch das erfolgreiche Stören alten Wissens, durch den Diskurs und die Kommunikation ist eines der Themen, dass man bei Vygotsky (in anderer Schreibung auch Vygotskij oder Wygotski) findet. Der russische Psychologe (1896–1934) postulierte das Konzept der *Zone der nächsten Entwicklung*. Vygotsky unterschied zwischen zwei Entwicklungsniveaus: zum einen das Niveau der aktuellen Entwicklung des Kindes – bestimmt als das, was das Kind allein leisten kann – und zum anderen das Niveau, das es in Zusammenarbeit mit einem Erwachsenen oder einem anderen Kind erreicht. Mit *Zone der nächsten Entwicklung* bezeichnete Vygotsky den Abstand zwischen diesen beiden Entwicklungsniveaus (alleine vs. in Zusammenarbeit). (Vgl. Wikipedia-Artikel zum Stichwort Wygotski, zuletzt abgerufen am 22.09.2014; Lizenz CC BY-SA) Unterricht hat sich nach Vygotsky an der Zone der nächsten Entwicklung und nicht nur am aktuellen Entwicklungsniveau des Kindes zu orientieren.

[2] Geprägt wurde dieser Begriff vor allem durch Heinrich Winter. (Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens. *Mathematik Lehren*, 2, 4–11.) Im Primarbereich sind vor allem die Bücher von Müller und Wittmann bekannt. (Wittmann, E.Ch. & Müller G.N. (1990/1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Vols. 1–2). Stuttgart: Klett.)

Vorwort

Lernumgebungen – Was ist das?

Der Begriff der Lernumgebungen ist keine neue Erfindung. Bereits John Dewey[1] spricht von sogenannten „Learning environments“ und meint damit Situationen und Möglichkeiten, in denen Wissen und Theorien angewandt werden können. Theorien und Wissen sind nach Dewey nichts anderes als Werkzeuge. „Wie im Falle aller Werkzeuge liegt ihr Wert nicht in ihnen selbst, sondern in ihrer Fähigkeit zu arbeiten, die sich in den Konsequenzen ihres Gebrauchs zeigt“[2]. So sollen Lernumgebungen dazu beitragen, diese Konsequenzen zu erkennen, einzuordnen und zu bewerten. Dazu benötigen die Schüler vielfältige und vernetzende Zugänge, die das Werkzeug Mathematik als sinnvoll erscheinen lassen und die es möglich machen, Mathematik zu betreiben.

Lernumgebungen sollen vier grundlegende Voraussetzungen erfüllen:

Sie sollten miteinander verbundene Aufgaben beinhalten. Diese Verbindung kann entweder über einen innermathematischen Zusammenhang geschehen oder über einen Umweltkontext, der sich idealerweise auch in die (Er-) Lebenswelt der Kinder erstreckt.

Lernumgebungen sollten außerdem dem Prinzip der natürlichen Differenzierung folgen. Das bedeutet, dass in jeder Lernumgebung Aufgaben unterschiedlicher Komplexitätsgrade zu finden sein müssen, die von unterschiedlichen Schülern in unterschiedlicher Zeit bearbeitet werden können. Idealerweise betrachten die Aufgaben ein Thema oder einen Themenkomplex unter verschiedenen Gesichtspunkten und regen dazu an, in diesem Thema noch weitere Varianten zu suchen.

Lernumgebungen haben kein genau festgelegtes Ende, keine gemeinsame, sondern nur eine individuelle Ergebnissicherung – auch mithilfe der Lösungen auf den Kommentarseiten – und keinen gemeinsamen Abschluss. Sie regen an, weiterzuarbeiten, können aber auch jederzeit beendet werden und sind nicht notwendigerweise komplett zu bearbeiten. Das widerspräche auch der natürlichen Differenzierung.

Lernumgebungen sind situiert. Sie nutzen Mathematik, um Situationen zu erklären und zu klären, sie lassen Mathematik entdecken und spannen einen vernetzenden Bogen nicht nur in andere mathematische Teilgebiete, sondern auch in andere Wissensgebiete, um deutlich zu machen, dass Wissen nicht in isolierten Welten stattfindet, sondern immer miteinander verbunden ist. Naturgemäß enthalten sie viele Aufgaben, in denen der Schüler erklären, erläutern, begründen oder zusammenführen muss. Denn dies sind Aufgaben, in denen die Netze zu anderen Themen- und Wissensgebieten geknüpft werden.

[1] Dewey, J. (1976–1983). The Middle Works, 1899–1924 (Vols. 1–15). Carbondale/Edwardsville: Southern Illinois University Press. Dewey, J. (1981–1990). The Later Works, 1925–1953 (17 Vol.). Carbondale/Edwardsville: Southern Illinois University Press.

[2] Dewey, J. (1989). Die Erneuerung der Philosophie. Hamburg: Junius, 190.

Aufgaben in Lernumgebungen regen dazu an, Mathematik (neu) zu entdecken und laden dazu ein, Mathematik zu betreiben, manchmal ohne es selbst zu merken. Die Herausbildung allgemeiner mathematischer Kompetenzen wie Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen oder auch Modellieren – so wie in den Lehr- und Bildungsplänen gefordert – ist ein zentrales Anliegen von Lernumgebungen. So finden sich viele Aufgaben zum Begründen, Erklären, Erläutern und zum einfachen Textverstehen in ihnen. Auch Aufgaben, die zunächst schwierig erscheinen, weil man kein Lösungskonzept zur Hand hat, sind in Lernumgebungen häufig anzutreffen. Sie regen dazu an, Möglichkeiten auszuprobieren und auszuloten und immer wieder auf verschiedenen Wegen zu versuchen, eine Lösung oder auch viele Lösungen zu einem Problem zu finden.

Etablierung im deutschsprachigen Mathematikunterricht

Bereits seit einigen Jahren setzen Schulbücher teilweise auf vernetzende Aufgaben. In einigen Büchern ist mittlerweile auch eine Abkehr von der thematisch geordneten Struktur zu erkennen. Diese Fokussierung auf eine strenge Abfolge von Themen führte in der Vergangenheit oft dazu, dass Themen aufgegriffen, nach der dazugehörenden Klassenarbeit aber auch sogleich wieder vergessen wurden. Die didaktische Entwicklung von Schulbüchern hin zu einem vernetzenden Ansatz hat einen deutlichen Schub durch das in der Schweiz erschienene *mathbu.ch* für die Klassenstufen 7, 8 und 9 erfahren, das an das Grundschulwerk *Zahlenbuch* anknüpft und die Idee der Lernumgebung in konsequenter Weise in einem Schulbuch umsetzt. Der anfänglichen Skepsis ist mittlerweile Begeisterung in der didaktischen Welt gefolgt, allerdings gepaart mit einem immensen Druck auf die Strukturierung des Unterrichts hin, der bei der Beschäftigung mit Lernumgebungen anders aussehen muss als im klassischen Fall. Der Klett-Verlag hat nun auch für den deutschen Markt ein Schulbuch mit Lernumgebungen veröffentlicht, das sich eng an dem Schweizer Vorbild *mathbu.ch* orientiert und als *Das Mathematikbuch* für Gymnasien erschienen ist. Kumulativer Erwerb von Wissen und Können zeichnet diese Bücher aus, die didaktisch fundiert versuchen, situierte Lernumgebungen zu gestalten und mit produktiven Übungsaufgaben zu verknüpfen.

Mit unseren Kopiervorlagen wollen wir nun einen weiteren Beitrag zur Etablierung von Lernumgebungen leisten. Anders als in einem Schulbuch geben wir keine gewünschte Reihenfolge vor, sondern überlassen es der Lehrkraft, an welcher Stelle sie welche Lernumgebung einsetzen möchte. Dennoch sollte man sich drüber im Klaren sein, dass ein vordergründiges Abhaken von Themen mit den Lernumgebungen nicht möglich ist.

Vorwort

Sinnvoller Einsatz – didaktischer und methodischer Rahmen

Mit Lernumgebungen zu arbeiten bedeutet, den Kindern zu vertrauen. Vertrauen, dass jeder ein wenig Mathematik mitnimmt; vertrauen, dass es nicht tragisch ist, wenn jeder am Ende einer Stunde an einer anderen Stelle angekommen ist; vertrauen, dass es nicht ein Ergebnis gibt, dass es herauszufinden gilt, sondern vielleicht 25 verschiedene Ergebnisse.

Lernumgebungen erfordern auf der anderen Seite aber auch den vollen Einsatz der Lehrkraft, denn jeder Schüler oder jede Gruppe ist an einer anderen Stelle, auf einem anderen Weg und bei einem anderen Problem. Das bedeutet, sowohl beratend als auch diagnostisch tätig zu sein und dies alles auf einer sehr individuellen Ebene, die versucht, jedem Schüler beim Betreiben von Mathematik gerecht zu werden. Das muss nicht immer funktionieren, darauf müssen Sie vorbereitet sein. Eine wichtige Voraussetzung ist aber in jedem Fall, dass das Unterrichtsarrangement so gestaltet ist, dass den Schülern ein möglichst guter Rahmen zur selbstständigen Tätigkeit geboten wird.

Lernumgebungen sind normalerweise für eine Doppelstunde konzipiert und können gut in einen kooperativen methodischen Rahmen eingebunden werden. Eine Anreicherung mit zusätzlichem Material kann in einigen Fällen sinnvoll sein und die Kopiervorlagen gut ergänzen. Es ist nicht immer notwendig, eine Lernumgebung passend zu einer gerade behandelten Thematik einzusetzen. Vielmehr ist es auch möglich, die Lernumgebungen als vernetzendes, wiederholendes Element zu verwenden, um die Sinnhaftigkeit von Mathematik an vielen Stellen zu verdeutlichen. Gleichzeitig greift man damit auf mathematische Themengebiete zurück, die bereits behandelt wurden, und aktiviert so vorhandenes Wissen bei den Schülern.

Im Sinne einer optimalen Nutzung der natürlichen Differenzierung, die in den Aufgaben steckt, sollte man nicht alle Lernenden alle Aufgaben bearbeiten lassen, sondern nach der einführenden Aufgabe die Schüler – eventuell nach einer Beratung durch die Lehrperson – über ihr weiteres Vorgehen entscheiden lassen. Natürlich ist auch die Einbindung von Lernumgebungen in Wochenpläne oder Freiarbeit möglich und sinnvoll.

Problemlos kann man auch einzelne Aufgaben aus einer Lernumgebung herauslösen und diese einzeln bearbeiten lassen. Viele der Aufgaben beinhalten in sich auch eine natürliche Differenzierung und damit eine steigende Progression hinsichtlich der kognitiven Tätigkeit.

In der Praxis bereits bewährt haben sich die Lernumgebungen als Aufgaben für ein regelmäßig geführtes Lerntagebuch oder auch als Langzeitaufgabe, bei der dem Schüler immer wieder eine dezidierte Rückmeldung zu seinen individuellen Fortschritten gegeben wird. Gerade hierbei kommt das Prinzip der natürlichen Differenzierung zu seiner vollen Entfaltung. So eingesetzt kann der vernetzende Charakter wiederum wertvolle Beiträge zum Wiederholen und Üben leisten.

Eine reflektierende und individuelle Unterstützung ist bei Lernumgebungen besonders ertragreich und unterstützt den Lernprozess deutlich. Diese müssen nicht unbedingt umfangreich, sondern sollten eher pointiert sein und den Lernprozess des einzelnen Schülers kurz in den Blick nehmen.

Aufbau des Buches

Wir wünschen Ihnen und insbesondere Ihren Schülern viel Spaß mit den Lernumgebungen und einen ertragreichen Mathematikunterricht. Wir freuen uns über Anregungen und Fragen zu unseren Ideen, die Sie gern an uns senden dürfen (matthiasroemer@gmx.de oder karlcharon@gmx.de).

K. Charon — Matthias Römer

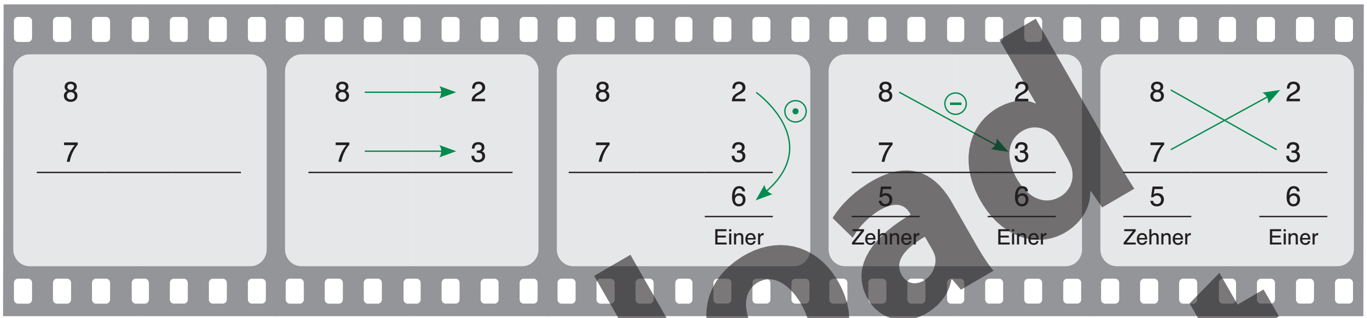
Karl Charon — Matthias Römer

> Veda ist eine Sammlung von Schriften aus der hinduistischen Kultur Indiens. Es besteht hauptsächlich aus religiösen Texten, und glaubt man der Meinung mancher Forscher, entstammen ihm auch die hier gezeigten Rechenverfahren.

1 Wenn wir zwei Zahlen schriftlich miteinander multiplizieren, tun wir dies mit unserem üblichen Rechenverfahren, bei dem jede Ziffer mit jeder Ziffer malgenommen wird.

In der vedischen Mathematik werden viele Rechenverfahren verwendet, die ganz anders aussehen als unser „schriftliches Rechnen“. In manchen Situationen sind sie verblüffend einfach und bringen Vorteile.

Sieh dir die Erklärung zum Berechnen von acht mal sieben an:



Schreibe die beiden Zahlen, die multipliziert werden sollen, untereinander.

Schreibe rechts daneben, was bis zur 10 fehlt. (die Differenz zur nächsten Zehnerpotenz)

Multipliziere 2 mit 3 und schreibe das Ergebnis als Einer darunter. (das Produkt der Differenzen)

Rechne 8 minus 3 und notiere das Resultat als Zehner des Ergebnisses.

Zur 5 für die Zehner kommst du auch über die andere Diagonale

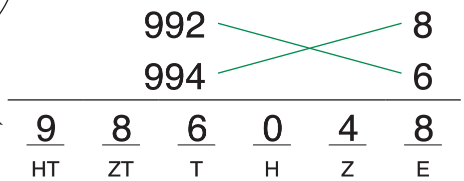
a) Übe das Verfahren ein, indem du es mit anderen Zahlen (9 · 8, 8 · 8 oder 8 · 6) ausprobierst. Überlege dir, wie man es jemandem erklären kann. Versuche, es zu Hause einem Familienmitglied anhand deiner Rechnungen zu erklären.

b) Carla hat auf die vedische Art sieben mal sechs berechnet und als Ergebnis 312 notiert. „Die Zwei war ja richtig, aber ich wusste nicht, was ich mit der Eins machen sollte …“ Ergründe ihr Problem. Wie kann man es lösen?

c) Ein Vergleich der zwei Rechenverfahren macht deutlich, welche Vorteile das vedische Multiplizieren hat. Multipliziere 992 · 994 mit der herkömmlichen Methode und vergleiche mit der vedischen Rechnung:

> **Zehnerpotenzen:**
> Zehnerpotenzen sind die dir bekannten Stufenzahlen wie 10, 100 oder 1000.
> Man nennt sie Zehnerpotenz, weil sie sich als Potenz mit der Basis 10 schreiben lassen:
> $10 = 10^1$
> $100 = 10^2$
> $1000 = 10^3$

Weil Tausend hier die Basiszahl ist, steht 986 (992 minus 6) für die Anzahl der Tausender. Deswegen muss vor der 48 eine Null eingefügt werden.



Probiere die Multiplikation mit anderen dreistelligen Zahlen aus. Wo gibt es Schwierigkeiten? Für welche Zahlen eignet sich die vedische Methode nicht? Multipliziere 97 · 96 nach der vedischen Methode.

In manchen Texten wird vermutet, dass das Kreuz als Symbol für das Multiplizieren seinen Ursprung in der vedischen Multiplikationsmethode hat. Verwendet wurde das Symbol in Europa schon zu Beginn des 17. Jahrhunderts.

2 Hat man Zahlen, die etwas größer als eine Zehnerpotenz sind, kann man das vedische Multiplikationsverfahren in leicht abgewandelter Form verwenden:

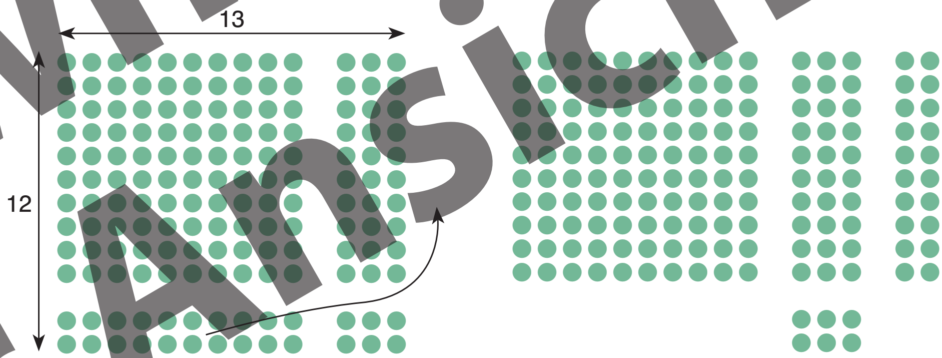
102				2
103				3
1	0	5	0	6
	T	H	Z	E

a) Wie erhält man hier aus den diagonal stehenden Zahlen 105 als vorderen Teil des Ergebnisses? Berechne mit dieser Methode 104 · 105 (112 · 103, 14 · 12).

b) Welches Problem entsteht beim Produkt 15 · 13?

c) In der Abbildung unten ist das Produkt 13 · 12 mit Plättchen gelegt. Man kann mit der Abbildung die obige Methode erklären. Wo findest du bei den Plättchen die 15, die bei der Methode vorkommt, wo findest du die 6? Woran siehst du bei den Plättchen, dass die 15 für Zehner steht? Kannst du ein Plättchenbild für das Produkt 14 · 12 zeichnen oder legen?

12		2
13		3
1	5	6
	Zehner	Einer



3 Außer den Multiplikationsmethoden von oben gibt es in der vedischen Mathematik noch viele weitere Rechentricks. Möchte man z. B. eine Zahl mit 11 multiplizieren, so geht man folgendermaßen vor:

4 3 2 1

4 7 5 3 1

a) Wie erhält man die 4 und die 1 im Ergebnis? Wie kommt man auf die 7, die 5 und die 3? Überprüfe das Ergebnis mit einer schriftlichen Rechnung. Probiere eigene Beispiele aus.

b) Wenn du deine schriftliche Rechnung etwas genauer anschaust, siehst du vielleicht eine Erklärung für den Rechentrick. Weshalb muss man benachbarte Ziffern addieren?

c) Man kann diese Multiplikationsmethode auch auf den Faktor 111 erweitern. Findest du heraus, wie? Kannst du damit 111 · 2341 berechnen?

Vedisch rechnen

Allgemeines zum Gegenstand der Lernumgebung

Unter dem Begriff „Vedische Mathematik“ werden Rechenmethoden zusammen gefasst, die Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts vom indischen Gelehrten und Forscher Bharati Krishna Tirthaji in einem Buch festgehalten wurden. Sie basieren auf 16 Sutren, die die Grundlage für alle Verfahren bilden. Seit Erscheinen des Buches wird angezweifelt, dass die Methoden, wie von Tirthaji behauptet, aus dem Veda, einer Sammlung alter hinduistischer Texte, stammen. Ungeachtet dessen kann man sicher sein, dass sie der alten hinduistischen Kultur entstammen und dort schon sehr lange Zeit praktiziert werden.

Informationen hierzu gibt es unter:
http://www.vedicmaths.org/

Didaktische Anmerkungen

Das Erlernen der schriftlichen Rechenverfahren nimmt in der Grundschule sehr viel Raum ein. In der Sekundarstufe müssen diese Verfahren weiter trainiert werden. Das Betrachten der hier vorgestellten Algorithmen soll dazu führen, dass die altbekannten Verfahren kritisch hinterfragt werden und der Blick für die Vielfalt an Lösungswegen geschärft wird. So ist zum Beispiel die hier auftretende Problematik des Übertrags hinlänglich bekannt; das Arbeiten mit dem neuen Algorithmus kann die Bedeutung des Übertrags beim alten Algorithmus deutlich machen und zu einem Verständnis führen, das über das rein kalkülhafte Anwenden hinausgeht. Auch können die Vorteile „unserer“ Verfahren diskutiert werden. Das Erlernen neuer „Rechentricks“ bereitet den meisten Kindern Freude, sie mögen es, damit andere zu verblüffen.

Grundlegende Ziele

Der Umgang mit unbekannten Algorithmen und eine kritische Bewertung sind die in erster Linie anvisierten Ziele dieser Lernumgebung. Die Reflexion über bereits erlernte Rechenmethoden geht damit einher, genauso wie das Beschreiben und Erklären selbstgefundener Methoden. Ein vertieftes Verständnis des Stellenwertsystems soll in der Behandlung von Fragestellungen zum Übertrag erreicht werden.

Einordnung der Aufgaben

Aufgabe	Kompetenzbereich	Leitidee	Anforderungsbereich
1. a)	K6	L1	I
1. b)	K1	L1	II
1. c)	K2, K6	L1	II
2. a)	K1, K2, K6	L1	II
2. b)	K1	L1	I
2. c)	K1	L1, L3	II
3. a)	K1, K6	L1	II
3. b)	K1	L1, L4	II
3. c)	K2	L1, L4	III

Zu den Aufgaben & Lösungen

1 Der „Filmstreifen“ ist eine Anleitung für das Verfahren zum Multiplizieren zweier Zahlen, die beide etwas unterhalb einer Zehnerpotenz liegen. Die Schüler sollen sich mit diesem Verfahren auseinandersetzen und es verinnerlichen.

a) Schwächere Schüler können hier mit einem Video oder durch die Lehrperson unterstützt werden. Die Aufforderung zum Erklären soll sicherstellen, dass sich keine Fehler festsetzen.

b) Da beim Produkt 3 · 4 der Zehner überschritten wird, muss dieser Übertrag zur 3 dazugerechnet werden. Man hat also zwei Einer und insgesamt vier Zehner. Damit stimmt das Ergebnis, denn 7 · 6 = 42.

c) An diesem Beispiel wird klar, wie effektiv die vedische Methode sein kann. Schwierigkeiten entstehen dann, wenn das Produkt der Differenzen zur Zehnerpotenz nicht mehr leicht im Kopf zu berechnen ist und man zusätzlich eine schriftliche Rechnung machen muss. Es gibt also Produkte, für die sich dieses Verfahren nicht so gut eignet. Für das Multiplizieren zweier zweistelliger Zahlen gibt es in der Aufgabe kein Beispiel. Die Schüler sollen selbst zu der Erkenntnis kommen, dass die „Diagonaldifferenz“ nun für Hunderter stehen muss.

96			4
97			3
9	3	1	2
T	H	Z	E

2 In Aufgabe 2 wird eine Erweiterung des Verfahrens auf Zahlen, die etwas größer sind als eine Zehnerpotenz, vorgestellt.

a) Die Zahlen, die diagonal stehen, werden hier addiert. Beim letzten Rechenbeispiel werden zwei zweistellige Zahlen multipliziert; in diesem Fall steht die „Diagonalsumme“ für Zehner.

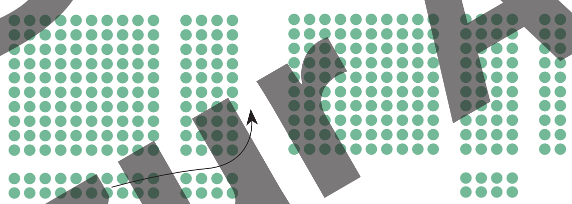
104				4
105				5
1	0	9	2	0
ZT	T	H	Z	E

112				12
103				3
1	1	5	3	6
ZT	T	H	Z	E

14		4
12		2
1	6	8
H	Z	E

b) Hier hat man einen ähnlichen Fall wie in Aufgabe 1. b). 5 · 3 ergibt 15, fünfzehn Einer führen zu einem Übertrag.

c) Beim rechten Plättchenbild hat man 15 Spalten. Sechs Plättchen hängen unten als kleines Rechteck an. Dass es 15 Zehner sein müssen, sieht man daran, dass es 15 Zehnerspalten sind. Ein Plättchenbild zu 14 · 12 könnte man durch Erweitern des ersten Plättchenbildes um eine Spalte erreichen.



3 Ein einfacher und verblüffender Rechenkniff wird hier vorgestellt. Vor allem bei großen Zahlen wird die Schnelligkeit dieses Verfahrens deutlich. Der Vorteil gegenüber dem herkömmlichen schriftlichen Multiplizieren liegt vor allem darin, dass weniger aufgeschrieben werden muss. Die Anzahl der Rechenschritte ist gleich.

a) Die 4 und die 1 werden als Randziffern übernommen. Die restlichen Ziffern ergeben sich als Summe der beiden darüber stehenden benachbarten Ziffern

b) Beim schriftlichen Multiplizieren wird 4321 versetzt untereinander geschrieben. Das liegt daran, dass diese Zahl einmal mit Eins und dann mit Zehn multipliziert wird. Benachbarte Ziffern stehen nun übereinander und werden addiert.

c) Multipliziert man mit 111, entstehen in der schriftlichen Rechnung drei Zeilen, da man mit Eins, Zehn und Hundert multipliziert. Beim Rechentrick müssen nun also bis zu drei Ziffern addiert werden. Nimmt man zum Beispiel die Zahl 4321 aus der Aufgabe 1. a), geht man folgendermaßen vor:

4	4 + 3	4 + 3 + 2	3 + 2 + 1	2 + 1	1
4	7	9	6	3	1

Das Ergebnis lautet somit 479 631. Wird die Summe größer als Zehn, muss man Überträge machen.

Literatur

Schonard, A. & Kokot, C. (2011). Der Matheknüller. Ulm: CPI books.

Yogeshwar R. in Wissen vor Acht (o. J.). Abgerufen am 03.03.2015 von https://www.youtube.com/watch?v=Sk8JXuLp6CI

Literatur zu den Lernumgebungen

Vorbemerkung: Diese Literaturliste erhebt in keinem Fall einen Anspruch auf eine Vollständigkeit hinsichtlich einer der in diesem Band vorgestellten didaktischen Ideen. Vielmehr soll sie einen Überblick über Bücher und Aufsätze geben, die man sich anschauen kann, wenn man etwas mehr über Lernumgebungen und deren grundlegende Idee erfahren möchte.

Affolter, W. et al. (2013). *mathbuch 1. Mathematik für die Sekundarstufe I.* Zug (CH): Klett und Balmer.

Affolter, W. et al. (2014). *mathbuch 2. Mathematik für die Sekundarstufe I.* Zug (CH): Klett und Balmer.

Affolter, W. et al. (2015). *mathbuch 3. Mathematik für die Sekundarstufe I.* Zug (CH): Klett und Balmer.

Affolter, W. et al. (2008). *Das Mathematikbuch 5. Lernumgebungen.* Stuttgart: Klett.

Affolter, W. et al. (2009). *Das Mathematikbuch 6. Lernumgebungen.* Stuttgart: Klett.

Affolter, W. et al. (2010). *Das Mathematikbuch 7. Lernumgebungen.* Stuttgart: Klett.

Affolter, W. et al. (2010). *Das Mathematikbuch 8. Lernumgebungen.* Stuttgart: Klett.

Affolter, W. et al. (2011). *Das Mathematikbuch 9. Lernumgebungen.* Stuttgart: Klett.

Arnold, R. (2007). *Ich lerne, also bin ich. Eine systemisch-konstruktivistische Didaktik.* Heidelberg: Carl-Auer.

Bohnsack, F. (2005). *John Dewey – Ein pädagogisches Portrait.* Weinheim: Beltz.

Gerstenmaier, J., Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik*, 6, 867–888.

Hirt, U., Wälti, B. (2014). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht* (4. Aufl.). Seelze: Kallmeyer.

Müller, G.N., Steinbring, H., Wittmann, E.Ch. (2004) (Hrsg.). *Arithmetik als Prozess.* Seelze: Kallmeyer.

Reich, K. (2006). *Konstruktivistische Didaktik.* Weinheim: Beltz.

Siebert, H. (2005). *Pädagogischer Konstruktivismus.* Weinheim: Beltz.

Voß, R. (2005) (Hrsg.). *Unterricht aus konstruktivistischer Sicht.* Weinheim: Beltz.

Impressum

Mathematik erleben in Lernumgebungen – Klasse 5/6

Matthias Römer ist seit 15 Jahren Lehrer an Gesamt- und Gemeinschaftschulen für Mathematik und Sozialkunde. Neben seiner Tätigkeit in der Schule führt er am Landesinstitut für Pädagogik und Medien Fortbildungen für Mathemtiklehrerinnen und -lehrer durch und ist mit einer halben Stelle an die Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik abgeordnet. Er hat einen Sohn.

Karl Charon ist seit 10 Jahren Lehrer an Gesamt- und Gemeinschaftsschulen für Mathematik und Physik. Davor schloss er eine Berufsausbildung zum Tischler ab und arbeitete als freiberuflicher Perkussionist. Zur Zeit ist er mit sechs Stunden abgeordnet an den Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik, Universität des Saarlandes. Er ist Vater von zwei Söhnen.

Veritaskai 3 · 21079 Hamburg
Fon (040) 32 50 83-060 · Fax (040) 32 50 83-050
info@aol-verlag.de · www.aol-verlag.de

Redaktion: Daniel Marquardt
Layout/Satz: Satzpunkt Ursula Ewert GmbH, Bayreuth
Illustrationen: Wolfgang Slawski
Cover: © thongsee – Fotolia.com

Bestellnr.: 10260DA12